



**HAL**  
open science

## Étude de la qualité locale de différentes versions de l'estimateur d'erreur en relation de comportement

Éric Florentin, Laurent Gallimard, Jean-Pierre Pelle

► **To cite this version:**

Éric Florentin, Laurent Gallimard, Jean-Pierre Pelle. Étude de la qualité locale de différentes versions de l'estimateur d'erreur en relation de comportement. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 2012, 12 (6), pp.761 - 783. 10.3166/reef.12.761-783 . hal-01689701

**HAL Id: hal-01689701**

**<https://hal.parisnanterre.fr/hal-01689701v1>**

Submitted on 22 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude de la qualité locale de différentes versions de l'estimateur d'erreur en relation de comportement

**Eric Florentin — Laurent Gallimard — Jean-Pierre Pelle**

*LMT-Cachan  
ENS de Cachan/CNRS/Université Paris VI  
61, Av. du président Wilson  
94235 Cachan Cedex  
France*

*RÉSUMÉ. Le travail présenté ici s'inscrit dans le prolongement des études menées sur les estimations d'erreur de discrétisation basé sur le concept d'erreur en relation de comportement. Une analyse des améliorations apportées à la technique de construction du champ de contrainte statiquement admissible est effectuée au moyen de tests numériques 2D. L'objectif est de mettre en évidence l'influence de ces améliorations sur la qualité locale de l'estimateur.*

*ABSTRACT. Work presented here is a prolongation of the studies undertaken on the error estimation based on the concept of constitutive error in relation. An analysis of improvements made to the technique of construction of the statically admissible stress field is carried out by means of 2D numerical tests. The target is to highlight the influence of these improvements on the local quality of the estimator.*

*MOTS-CLÉS : construction statiquement admissible, erreur locale, élasticité, analyse éléments finis*

*KEYWORDS: equilibrated fields, local error, elasticity, finite element analysis*

## 1. Introduction

Pour les problèmes linéaires, de nombreux travaux ont proposé, depuis plus de 20 ans des estimateurs d'erreur de discrétisation. Ces estimateurs permettent d'évaluer la qualité globale d'un calcul éléments finis en donnant une évaluation de la norme en énergie  $\|U_{ex} - U_h\|$  de l'écart entre le champ de déplacement exact  $U_{ex}$  et le champ de déplacement éléments finis  $U_h$ .

Plus récemment des méthodes d'évaluation de la qualité locale d'une solution éléments finis ont été proposées [RAN 97, LAD 99, PER 98, PRU 99, STR 00, OHM 01, DIE 03]. Généralement, elles sont basées sur le calcul approché d'un opérateur de Green.

Néanmoins, dans le prolongement de la démarche conduisant aux estimateurs d'erreur en relation de comportement, une méthode d'estimation de l'erreur locale sur les contraintes a été proposée en élasticité 2D dans [LAD 97] et en 3D dans [FLO 02a, FLO 02b]. Cette méthode repose sur une amélioration des techniques de construction des champs admissibles et évite ainsi le recours à un opérateur de Green.

L'objet de cet article est de présenter une étude systématique de ces améliorations afin d'évaluer leur intérêt pour l'estimation de la qualité locale des contraintes éléments finis.

Le problème de référence (élasticité linéaire) et le problème éléments finis associé sont rappelés au paragraphe 2. Les fondements de l'erreur en relation de comportement et les grandes lignes de sa mise œuvre sont rappelés au paragraphe 3. Cette mise en œuvre repose essentiellement sur la construction, à partir des données et de la solution éléments finis d'un champ de contrainte  $\hat{\sigma}$  rigoureusement en équilibre. Cette construction comporte deux grandes étapes :

- construction de densités d'effort  $\hat{F}$  sur les interfaces des éléments
- construction locale de la restriction  $\hat{\sigma}|_E$  de  $\hat{\sigma}$  sur chaque élément E.

Nous rappelons au paragraphe 4, la construction classique d'un champ  $\hat{\sigma}$  qui utilise une construction quasi explicite des densités  $\hat{F}$  et une construction analytique explicite de  $\hat{\sigma}$ . Ces techniques conduisent à un estimateur qualifié de "standard". Au paragraphe 5 nous présentons les techniques d'amélioration de ces constructions :

- optimisation du calcul des densités  $\hat{F}$
- détermination numérique de  $\hat{\sigma}|_E$  sur chaque élément.

qui conduisent à un estimateur que nous appellerons "estimateur optimisé".

Dans un premier temps, ces deux estimateurs sont comparés sur des cas tests où la solution exacte est connue (paragraphe 5).

Au paragraphe 7, nous examinons en détail l'influence de la construction numérique de  $\hat{\sigma}|_E$  sur les qualités globale et locale de l'estimateur en relation de comportement et au paragraphe 8 l'influence de l'optimisation du calcul des densités.

L'ensemble de ce travail montre que l'estimateur optimisé a un excellent comportement, aussi bien d'un point de vue global que d'un point de vue local. En particulier, si  $\sigma_h$  est la contrainte éléments finis et  $\sigma_{ex}$  la contrainte exacte, on a numériquement :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,E} \leq C \|\hat{\sigma} - \sigma_h\|_{\sigma,E}$$

où  $\|\cdot\|_{\sigma,E}$  est la norme en énergie sur  $E$  et  $C$  une constante de l'ordre de 1.

Une mise en œuvre et des exemples d'utilisation de cet estimateur pour les problèmes d'élasticité 3D peuvent être trouvés dans [FLO 02a].

## 2. Problème de référence

On considère une structure élastique qui occupe un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Les actions de l'environnement sur la structure sont schématisées par :

- un déplacement imposé  $U_d$  sur une partie  $\partial_1\Omega$  de la frontière,
- une densité volumique de force  $f_d$  donnée dans  $\Omega$ ,
- une densité surfacique de force  $F_d$  donnée sur  $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$ .

On note  $\mathbf{K}$  l'opérateur de Hooke du matériau. Le problème peut alors être formulé de la façon suivante :

Trouver un champ de déplacement  $U_{ex}$  et un champ de contrainte  $\sigma_{ex}$  définis sur  $\Omega$ , qui satisfont :

- les liaisons cinématiques :

$$U_{ex} |_{\partial_1\Omega} = U_d \quad (1)$$

- les équations d'équilibre :

Pour tout  $U^*$  nul sur  $\partial_1\Omega$

$$\int_{\Omega} Tr[\sigma_{ex}\varepsilon(U^*)]d\Omega = \int_{\Omega} f_d U^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_d U^* dS \quad (2)$$

- la relation de comportement :

$$\sigma_{ex} = \mathbf{K}\varepsilon(U_{ex}) \quad (3)$$

$\varepsilon(U)$  représente la déformation linéarisée associée au déplacement.  $(U_{ex}, \sigma_{ex})$  est le couple solution de ce problème de référence.  $(U_h, \sigma_h)$  est le couple solution approché éléments finis de ce problème de référence.

### 3. Erreur en relation de comportement

▷ Erreur en solution :

On cherche à connaître la qualité de la solution discrétisée  $(U_h, \sigma_h)$  en tant qu'approximation de la solution  $(U_{ex}, \sigma_{ex})$  du problème continu correspondant. On définit classiquement une mesure de l'erreur en solution sur la structure :

$$e_h = \|e_h\|_{u,\Omega} = \|U_{ex} - U_h\|_{u,\Omega} = \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,\Omega} \quad (4)$$

où  $\|\bullet\|_{\bullet,\Omega}$  représente la norme énergétique de  $\bullet$  sur  $\Omega$ .

▷ Erreur estimée :

Cette erreur est estimée par l'erreur en relation de comportement. Le concept d'erreur en relation de comportement repose sur la séparation des équations en deux groupes :

- les équations d'admissibilité : liaison et équilibre (1, 2),
- la relation de comportement (3).

La relation de comportement a un statut particulier. Dans la pratique, elle est souvent la moins fiable des équations. Un couple admissible  $(\widehat{U}, \widehat{\sigma})$  vérifiant le premier groupe d'équations est construit. La non vérification de la relation de comportement permet alors de définir  $e_{RdC}$ . Cette estimation est une somme de contributions élémentaires :

$$\begin{aligned} e_{RdC}^2 &= \sum_{E \in \mathbf{E}} e_{RdC,E}^2 \\ e_{RdC,E}^2 &= \int_E Tr[(\widehat{\sigma} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\widehat{U})) \mathbf{K}^{-1}(\widehat{\sigma} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\widehat{U}))] dE \\ &= \|\widehat{\sigma} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\widehat{U})\|_{\sigma,E}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

#### 3.1. Construction d'un couple admissible

Le déplacement  $\widehat{U}$  est généralement pris égal à  $U_h$ . Ceci est possible car la solution éléments finis vérifie les équations de liaison :

$$\widehat{U} = U_h \quad (6)$$

Le point principal de la méthode basé sur l'erreur en relation de comportement est de construire une contrainte  $\widehat{\sigma}$  qui vérifie les équations d'équilibre, à partir de  $\sigma_h$  et des données. Dans le cadre de l'élasticité, la technique proposée dans [GUE 82], et

développée depuis dans [LAD 97, LAD 01, ROU 89, MAR 91, COF 87] permet de s'affranchir de cette difficulté. La construction d'un champ de contrainte statiquement admissible se décompose en deux étapes :

– Construction de densités d'effort  $\widehat{F}$  définies sur les bords de chaque élément. Ces densités sont calculées pour être en équilibre avec les charges données du problème de référence, c'est-à-dire qu'elles vérifient  $\widehat{F} = F_d$  sur  $\partial_2\Omega$  et :

$$\begin{aligned} & \forall U_S^* \text{ champ de solide sur } E \\ & \int_E f_d \cdot U_S^* dE + \int_{\partial E} \widehat{F} \cdot U_S^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Ces densités peuvent être obtenues d'au moins deux manières. La première consiste à choisir un jeu de densités à moindre coût, en se donnant une règle qui prolonge  $\sigma_h$  en  $\widehat{\sigma}$  (méthode standard). La deuxième consiste à retenir un jeu de densités optimal parmi une famille de jeux de densités possibles (méthode optimisée).

– Construction de  $\widehat{\sigma}$  à partir de  $\widehat{F}$  en résolvant un problème local (sur chaque élément) de petite taille. Les densités déterminées précédemment interviennent ici comme des charges connues. Là encore, au moins deux manières de résoudre peuvent être envisagées. On peut résoudre analytiquement en prenant une forme simple pour  $\widehat{\sigma}$  (méthode analytique), on peut aussi résoudre numériquement ce problème en utilisant une méthode d'éléments finis (méthode numérique).

### 3.2. Propriétés

Avec ce choix de champs admissibles, en utilisant le théorème de Prager-Synge [PRA 47], on montre la majoration de l'erreur en solution globale par l'erreur en relation de comportement :

$$e_h \leq e_{RdC} \quad (8)$$

Si on souhaite estimer l'erreur locale sur un élément  $E$  :

$$\|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,E} \quad (9)$$

on peut utiliser les informations obtenues lors de la construction de l'erreur globale  $\|\widehat{\sigma} - \mathbf{K}_\varepsilon(\widehat{U})\|_{\sigma,E}^2$ . En effet, à condition de construire un champ  $\widehat{\sigma}$  de meilleure qualité que  $\sigma_h$ , c'est-à-dire tel que :

$$\|\widehat{\sigma} - \sigma_{ex}\|_{\sigma,E} = A \|\sigma_h - \sigma_{ex}\|_{\sigma,E} \quad \text{avec} \quad 0 \leq A < 1 \quad (10)$$

Alors :

$$\|\sigma_h - \sigma_{ex}\|_{\sigma,E} \leq \|\sigma_h - \widehat{\sigma}\|_{\sigma,E} + A \|\sigma_h - \sigma_{ex}\|_{\sigma,E} \quad (11)$$

Et donc, il existe une constante  $C$  :

$$\|\sigma_h - \sigma_{ex}\|_{\sigma,E} \leq C \|\widehat{\sigma} - \sigma_h\|_{\sigma,E} \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{1-A} \quad (12)$$

Lorsque  $A < 1$ , la majoration (12) est obtenue avec  $C \geq 1$ . De plus, plus  $A$  est petit et plus  $C$  est proche de 1.

### 3.3. Qualité d'une estimation d'erreur

Un des principaux critères intrinsèques de qualité, aujourd'hui communément admis est l'indice d'efficacité. L'indice d'efficacité est défini par :

$$\zeta = \frac{\text{mesure estimée de l'erreur}}{\text{mesure de l'erreur en solution}}$$

En pratique, pour un bon estimateur, l'indice d'efficacité global doit être proche de 1. Pour évaluer  $\zeta$ , la méthode la plus sûre consiste à utiliser des problèmes tests où la solution exacte est connue analytiquement. Une autre technique largement répandue consiste à prendre comme solution "exacte" une solution éléments finis obtenue sur un maillage très fin. Pour obtenir des résultats fiables, il est indispensable que ce maillage soit nettement plus fin que le maillage sur lequel l'erreur est estimée, et il faut prendre quelques précautions pour transférer les champs d'un maillage à l'autre.

Plus précisément :

$$\zeta = \frac{\|\widehat{\sigma} - \sigma_h\|_{\sigma,\Omega}}{\|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,\Omega}} = \frac{e_{RdC}}{e_h} \quad (13)$$

Lorsque l'objectif est d'estimer l'erreur locale réellement commise sur un élément  $E$  d'un maillage, on introduit un indice d'efficacité local  $\zeta_E$ . Il permet de connaître la qualité de l'estimation. L'objectif est atteint si la contribution  $e_{RdC,E}$  conduit à  $\zeta_E$  proche de 1.

$$\zeta_E = \frac{\|\widehat{\sigma} - \sigma_h\|_{\sigma,E}}{\|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,E}} = \frac{e_{RdC,E}}{e_{h,E}} \quad (14)$$

## 4. Construction d'un champ de contrainte statiquement admissible standard

L'estimateur en relation de comportement basé sur une construction d'un champ de contrainte statiquement admissible standard conduit à un estimateur standard. La construction des champs de contraintes statiquement admissibles (SA) pour un estimateur d'erreur standard 2D est détaillée [LAD 91, ROU 89].

L'idée est de construire le plus simplement possible un champ de contrainte  $\widehat{\sigma}$  en équilibre, à partir de la solution E.F.  $\sigma_h$  et des données. On construit dans un premier

temps un jeu de densités d'effort  $\widehat{F}^{Std}$  en équilibre sur le bord de chacun des éléments E. On construit ensuite un champ de contraintes en équilibre  $\widehat{\sigma}$  analytiquement élément par élément.

▷ *Construction des densités  $\widehat{F}^{Std}$  en équilibre*

Une condition dite de "prolongement" a été proposée dans [LAD 75]. L'idée est de déterminer localement (donc à moindre coût), les projections des densité  $\widehat{F}$  sur les fonctions de bases éléments finis  $\varphi_i$ .

$$\int_{\partial E} \eta_E \widehat{F} \varphi_i dS = \int_{\partial E} \varphi_i \sigma_h n dS - \int_E f_d \varphi_i dV \quad (15)$$

Les densités peuvent alors être complètement déterminées si l'on suppose que  $\widehat{F}$ , se décompose uniquement sur ces fonctions de base. Cette détermination est faite à très faible coût, en résolvant des petits systèmes locaux [ROU 89].

▷ *Construction de la contrainte*

Pour un jeu de densités  $\widehat{F}^{Std}$  en équilibre avec les charges intérieures, on cherche un champ de contrainte en équilibre sur chacun des éléments E.

Il s'agit de construire une contrainte qui vérifie sur E :

$$\widehat{\sigma} \in \mathcal{S}_{ad, \widehat{F}} \equiv \begin{cases} \widehat{\sigma} \in \mathcal{S} \\ \text{div}(\widehat{\sigma}) + f_d = 0 \quad \text{sur } E \\ \widehat{\sigma} n = \eta_E \widehat{F} \quad \text{sur } \partial E \end{cases} \quad (16)$$

Puisque les densités sont en équilibre avec  $f_d$ , il existe une infinité de solutions pour  $\widehat{\sigma}$ . Pour construire de manière analytique une solution simple, lorsque les charges intérieures  $f_d$  sont polynomiales, l'idée consiste à chercher une solution  $\widehat{\sigma}$  polynomiale par morceaux [GUE 82, ROU 89].

## 5. Construction d'un champ de contrainte statiquement admissible optimisé

L'estimateur en relation de comportement basé sur une construction d'un champ de contrainte statiquement admissible optimisé conduit à un estimateur optimisé. L'idée de base consiste à se donner plus de souplesse lors de la construction [LAD 99, LAD 97, LAD 01], ceci afin d'obtenir une contrainte  $\widehat{\sigma}$  de meilleure qualité. La modification proposée revient à abandonner la condition de prolongement associée aux nœuds sommets. Comme on le verra, ceci conduit à une amélioration notable de  $\widehat{F}$ , donc de  $\widehat{\sigma}$ .

L'idée présentée dans [LAD 97] est d'affaiblir la condition de prolongement, en la faisant porter uniquement sur les nœuds non sommets  $i \in \mathbf{I}$  : il en résulte une plus



grande liberté dans la construction des densités qui va être utilisée pour minimiser l'erreur en relation de comportement.

▷ *Construction des densités  $\widehat{F}^{Opt}$  en équilibre*

On note  $H$  la partie de  $\widehat{F}$  correspondant aux fonctions de base des nœuds non sommets. La partie complémentaire est notée  $R = \widehat{F} - H$ .

La partie  $H$  peut être déterminée complètement en utilisant la condition de prolongement affaiblie. Pour cela, les techniques développées pour la condition de prolongement forte [ROU 89] sont utilisées.

On détermine l'ensemble des inconnues restantes  $R$  en minimisant l'énergie complémentaire de la structure entière. Cependant, sur chaque face,  $R$  ne peut être choisi de manière quelconque. En effet, il doit conduire à un champ  $\widehat{F}$  en équilibre avec les charges du problème initial ( $F_d$  et  $f_d$ ). On a donc à résoudre un problème de minimisation sous contrainte. Ce problème est détaillé dans [LAD 97]. Ce jeu de densités conduit à un jeu de densités optimisé  $\widehat{F}^{Opt}$ .

▷ *Construction de la contrainte*

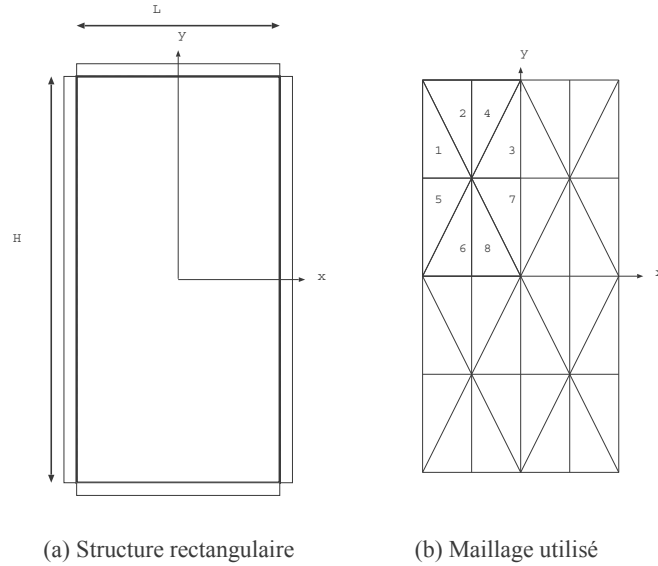
On peut alors construire un champ  $\widehat{\sigma}$  à partir de ce jeu de densités  $\widehat{F}^{Opt}$ . Pour cela, on cherche une solution au problème (16). Une manière de faire est de retenir parmi tous les champs statiquement admissibles celui qui minimise l'énergie complémentaire sur chacun des éléments.

Par dualité cela revient à minimiser l'énergie potentielle élément par éléments. Nous retenons une approximation éléments finis de ce problème en maillant un élément (degré  $p$ ) par un élément de degré plus élevé (degré  $p + 3$ ). Cette construction conduit à des résultats de qualité suffisante comme le montre [BAB 94]. La contrainte est ainsi obtenue numériquement :  $\widehat{\sigma} = \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(U_{p+3})$ .

## 6. Comparaison des deux estimateurs

L'estimateur standard (basé sur la construction standard) est moins coûteux que l'estimateur optimisé (basé sur une construction optimisée). Dans la plupart des situations courantes, l'estimateur standard utilisé depuis de nombreuses années, conduit à une bonne estimation globale de l'erreur [LAD 01], les indices d'efficacité sont toujours supérieurs à 1 par construction sont numériquement proches de 1. Par contre, lorsque les éléments s'aplatissent, l'estimateur standard a tendance à surestimer largement l'erreur réellement commise. L'exemple suivant illustre cette remarque, et confirme les résultats déjà obtenus dans [LAD 97].

Il s'agit d'une structure rectangulaire soumise à des efforts sur son bord. Le maillage de la structure est réalisé avec des éléments triangles à 6 nœuds (figure 1(b)).



**Figure 1.** Structure étudiée

Les conditions limites en effort sont définies sur tout le bord de la structure de façon que la solution exacte du problème soit de la forme (17) :

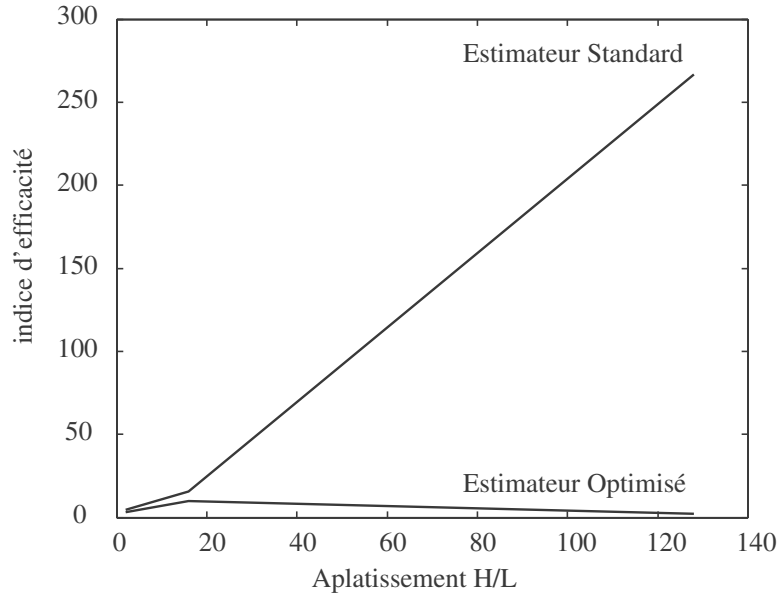
$$e_x = \begin{pmatrix} 2xy & -(x^2 + y^2) \\ -(x^2 + y^2) & 2xy \end{pmatrix} \quad (17)$$

L'erreur en solution étant connue, on peut évaluer les indices d'efficacité globaux.

En faisant varier les paramètres géométriques  $L$  et  $H$ , correspondant respectivement à la largeur et à la hauteur de la structure rectangulaire on se place dans différentes situations d'aplatissement.

On constate (figure 2) que l'estimation reste correcte pour les forts aplatissements avec le nouvel estimateur. Différentes techniques et approximations sont utilisées pour construire des champs  $\hat{\sigma}$  en équilibre. Il s'agit d'estimer ici leurs influences respectives sur la qualité de l'estimation d'erreur associée.

Dans tous les cas, on construit d'abord un champ de densité en équilibre  $\hat{F}$  sur le bord des éléments. Dans la version standard, on construit  $\hat{F}^{Std}$  à partir de la condition de prolongement forte. Dans la version optimisée on construit  $\hat{F}^{Opt}$  à partir de la condition de prolongement affaiblie et d'une optimisation numérique.

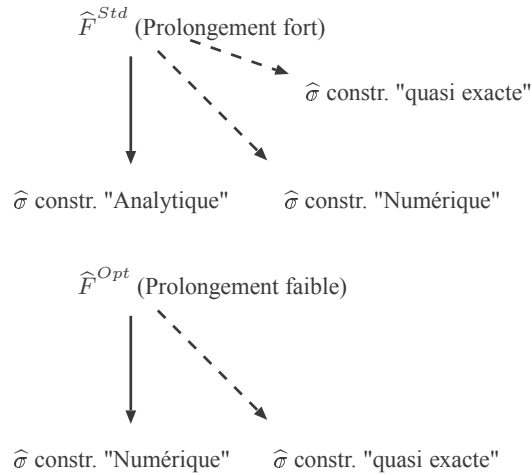


**Figure 2.** Indices d'efficacité comparés en fonction de l'aplatissement

Dans chacune des situations, on construit  $\hat{\sigma}$  à partir d'un jeu de densités  $\hat{F}$ . Dans le cas standard on cherche une forme polynomiale de manière analytique. Dans le cas optimisé, on retient une résolution numérique.

Pour ces deux constructions de  $\hat{\sigma}$ , plusieurs paramètres varient. On cherche à présent à savoir quels sont leurs rôles relatifs, dans la qualité de l'estimation de l'erreur globale et dans celle de l'erreur locale. A partir de chacun des jeux de densité, on construit différents champs de contraintes  $\hat{\sigma}$  (figure 3). A partir du jeu  $\hat{F}^{Std}$ , on peut obtenir un champ de contrainte  $\hat{\sigma}$  par la construction analytique et par la construction numérique. A ces constructions locales de  $\hat{\sigma}$  "numérique" et "analytique", on ajoute pour les tests une troisième construction dite "quasi exacte" qui nous servira de référence, où l'on cherche la contrainte  $\hat{\sigma}$  sur l'élément  $E$  qui est en équilibre avec  $\hat{F}^{Std}$  et  $f_d$  (16), et qui minimise l'énergie complémentaire (cette construction est décrite au paragraphe 7). A partir du jeu  $\hat{F}^{Opt}$ , on peut obtenir un champ de contrainte  $\hat{\sigma}$  par la construction numérique. Pour les tests, nous introduisons également une construction "quasi exacte" associée à  $\hat{F}^{Opt}$ . Ceci permet de conclure sur la pertinence du choix :

- de la méthode pour la construction de contrainte,
- du jeu de densités utilisé.



**Figure 3.** *Différentes constructions étudiées*

On étudie d'abord la résolution numérique en la comparant à une résolution exacte, puis en la comparant à la résolution analytique ; ceci avec un jeu de densité fixé (paragraphe 7).

On étudie ensuite les conséquences du choix de l'un ou l'autre des jeux de densités avec un type de résolution fixé (paragraphe 8).

## 7. Etude sur la résolution numérique

On montre dans ce paragraphe que la résolution numérique proposée est de suffisamment bonne qualité pour être utilisée dans un estimateur d'erreur en relation de comportement. Cette vérification est capitale. En effet, on s'appuie sur le fait que  $\widehat{\sigma}$  vérifie les équations d'équilibre, pour prouver notamment la majoration de l'erreur en solution globale. Cette construction est validée par comparaison à une construction quasi exacte de référence. Dans [COO 99], on peut trouver une première comparaison entre la construction analytique et la construction numérique approchée. Les erreurs obtenues diffèrent peu sur les cas tests traités. Ici notre objectif est de comparer la construction numérique approchée avec la construction théorique qui utiliserait la solution exacte du problème dual.

### 7.1. Résolution quasi exacte de la contrainte à partir de densités

Nous proposons de résoudre quasi exactement le problème de minimisation de la construction d'une contrainte à partir d'un jeu de densité en équilibre sur un élément

$E$  du maillage. Pour cela nous utilisons une discrétisation obtenue par adaptation de maillage ( $h$ -génération), ce qui permet de garantir ainsi une qualité fixée.

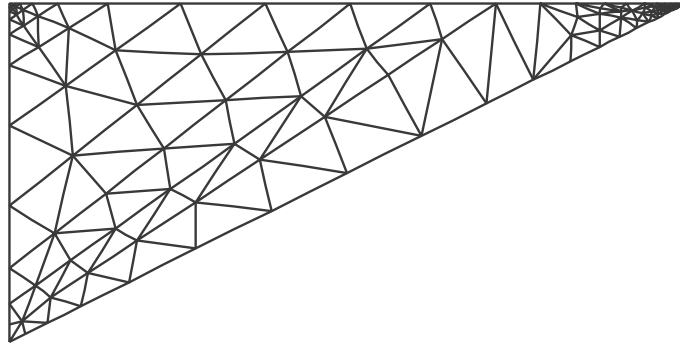
Cet estimateur d'erreur de référence est construit ici uniquement pour la démonstration. A partir des densités  $\widehat{F}^{Opt}$ , on construit donc  $\widehat{\sigma}$  en résolvant de manière quasi exacte le problème de minimisation. En se fixant une qualité donnée faible, on remaille chaque élément en le considérant comme une structure.

Plus précisément, pour chacun des éléments, on définit le problème suivant :

$$\min_{U|_E \in \mathcal{U}^{h,\epsilon_0}(E)} J_1^E(U|_E) \quad (18)$$

où  $J_1^E$  est l'énergie potentielle associée au problème sur un élément  $E$ .  
 où  $\mathcal{U}^{h,\epsilon_0}(E)$  est un espace de discrétisation qui garantit une erreur en solution inférieure à  $\epsilon_0$  sur  $E$ .

Une technique de remaillage adaptatif a été employée pour garantir cette qualité. Chaque élément de la structure initiale est considéré comme une structure à part entière vis-à-vis du remaillage. La figure (figure 4) montre le maillage obtenu pour un des éléments de la structure rectangulaire, l'objectif fixé du remaillage étant  $\epsilon_0 = 5\%$ .



**Figure 4.** Maillage respectant un objectif de  $\epsilon_0 = 5\%$  sur l'élément

On contrôle donc parfaitement  $\epsilon_0$  et l'approximation ainsi faite. Pour  $\epsilon_0$  suffisamment petit, on conclura que la solution  $\widehat{\sigma}$  obtenue correspond à une construction exacte.

## 7.2. Comparaison entre résolution numérique et résolution quasi exacte

On compare ici la résolution numérique et la résolution quasi exacte. On montre qu'à partir d'un même jeu  $\widehat{F}^{Opt}$ , la construction basée sur la résolution numérique et la résolution quasi exacte conduisent à une estimation très proche. On note  $\zeta_{num}$  l'indice d'efficacité de l'estimation  $e_{num}$  basée sur la résolution numérique. De même,  $e_{qex}$  et  $\zeta_{qex}$  sont respectivement l'erreur et l'indice d'efficacité associés à la résolution quasi exacte. On définit le rapport  $r$  des estimations :

$$r = \frac{e_{num}}{e_{qex}} = \frac{\zeta_{num}}{\zeta_{qex}} \quad (19)$$

Au niveau local, pour chaque élément  $E$  d'un maillage on peut définir la quantité analogue  $r_E$  :

$$r_E = \frac{e_{E,num}}{e_{E,qex}} = \frac{\zeta_{E,num}}{\zeta_{E,qex}} \quad (20)$$

Sur l'exemple de la structure rectangulaire décrit précédemment, on vérifie que les rapports  $r$ , relatifs aux différents aplatissements, sont proches de 1 :

$$0.92 \leq r \leq 0.95 \quad (21)$$

Ceci montre que l'hypothèse cinématique réalisée (maillage avec un élément de degré plus élevé :  $p + 3$ ) lors de la résolution numérique est valable.

Pour l'ensemble  $E \in \mathbf{E}$ , les rapports  $r_E$  sont proches de 1 aussi. Il n'y a donc pas de phénomène de compensation entre les éléments. Pour l'ensemble des éléments  $E$ , on a :

$$0.93 \leq r_E \leq 0.97 \quad (22)$$

Cet exemple illustre la validité de la construction numérique. Cette même étude peut être menée à partir d'un autre jeu de densités. Par exemple, si on fait la même étude à partir de  $\widehat{F}^{Std}$ , les conclusions sont identiques :

$$0.89 \leq r \leq 0.95 \quad (23)$$

Les rapports  $r_E$  sont également proches de 1. Il n'y a donc pas de phénomène de compensation entre les éléments. Pour l'ensemble des éléments du maillage  $E \in \mathbf{E}$  :

$$0.86 \leq r_E \leq 0.97 \quad (24)$$

La construction numérique est valide. Quel que soit le jeu de densités et quel que soit l'aplatissement, la résolution numérique conduit à des résultats proches de la construction exacte.

La résolution numérique de type  $p + 3$ , c'est-à-dire une résolution approchée de manière cinématique, conduit à un champ  $\widehat{\sigma}$  de bonne qualité. En effet, la norme énergétique de la contrainte obtenue est très proche de celle qu'on obtient par une résolution quasi exacte.

### 7.3. Intérêt de la résolution numérique par rapport à la résolution analytique

#### 7.3.1. Relation avec l'aplatissement

On montre dans ce paragraphe que l'utilisation de la résolution numérique améliore l'indice d'efficacité par rapport à la résolution analytique, dans le cas des maillages fortement anisotropes. Pour cela, on compare l'indice d'efficacité obtenu en construisant  $\hat{\sigma}$  de manière numérique et de manière analytique, à partir d'un même jeu de densités  $\hat{F}^{Std}$ . Il est à noter que la première estimation correspond à une estimation standard de l'erreur en relation de comportement.

Pour l'exemple de la structure rectangulaire, on trace les indices d'efficacité en fonction de l'aplatissement (figure 5).

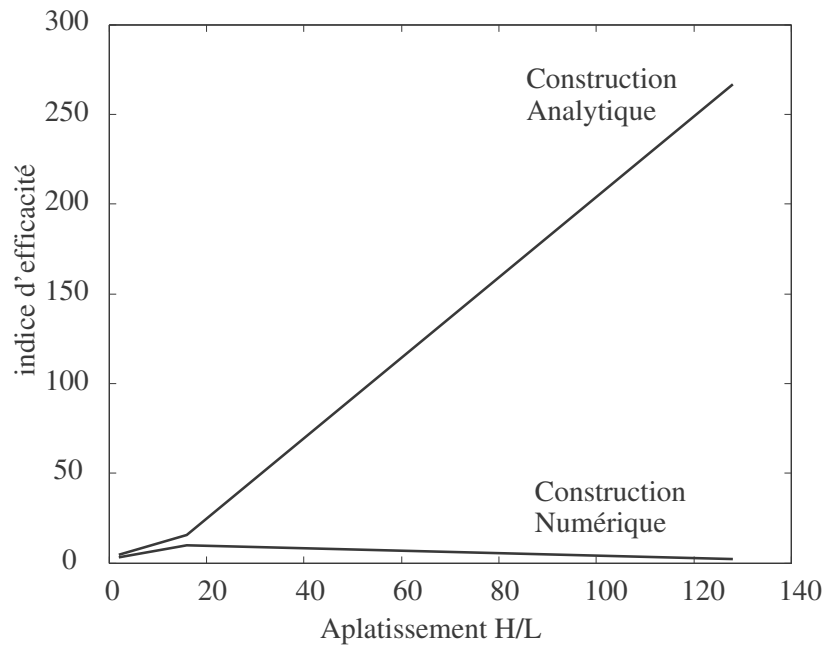
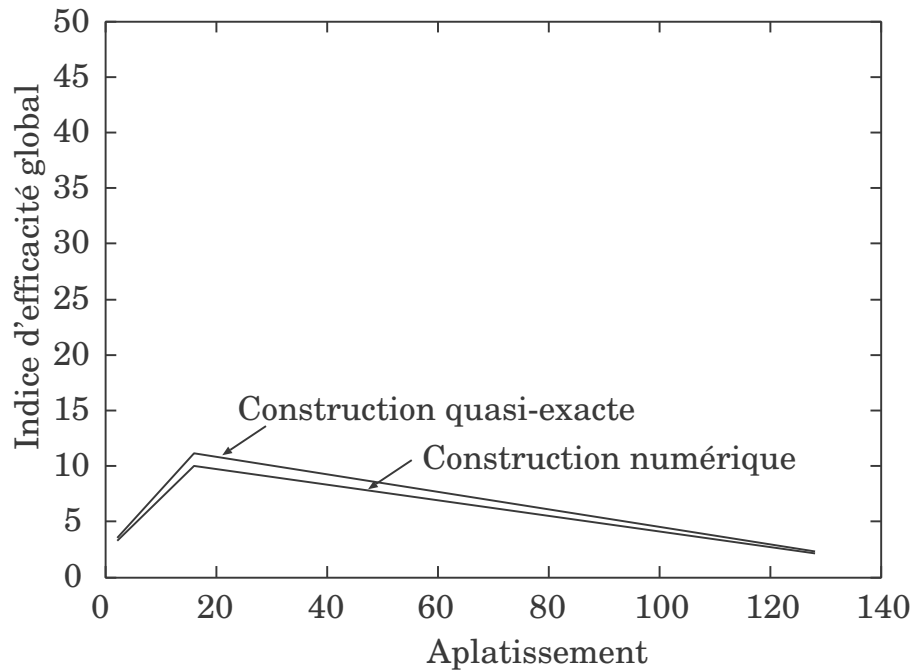


Figure 5. Evolution des indices d'efficacité en fonction de l'aplatissement

On constate que la construction analytique conduit à des indices d'efficacité nettement supérieurs à ceux obtenus en utilisant la construction numérique. En effet, l'estimateur standard peut conduire dans les cas de maillages fortement anisotropes à des indices d'efficacité supérieurs à 250. L'estimateur basé sur une construction numérique donne des indices nettement plus proches de 1. Cette constatation met en évidence que l'estimation d'erreur associée à la construction analytique est sensible à



**Figure 6.** Zoom : évolution des indices d'efficacité

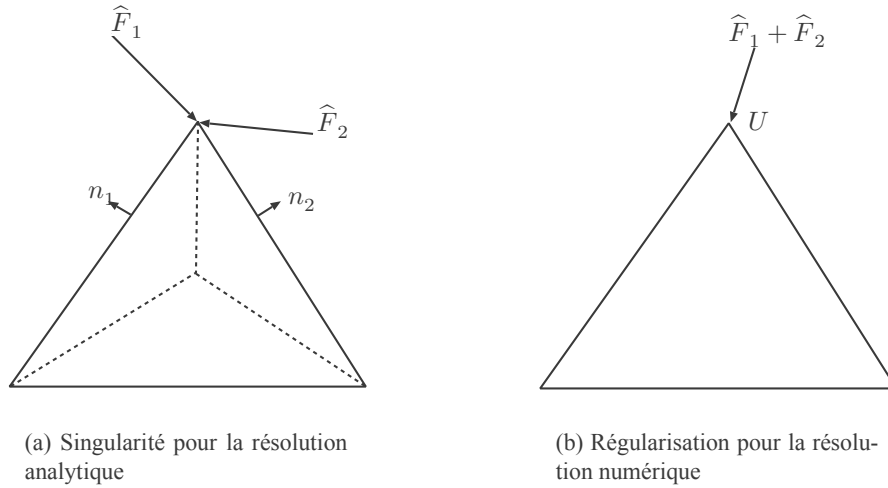
l'aplatissement des éléments. Ce n'est pas le cas pour la résolution numérique avec le même jeu de densités  $\hat{F}^{Std}$ . Pour comparer ces résultats à ceux de la figure (figure 2), un zoom est nécessaire, on constate sur la figure (figure 6) que, si le gain le plus important est dû à l'utilisation d'une construction numérique, l'optimisation des densités apporte néanmoins un gain supplémentaire. On reviendra sur ce point au paragraphe 8.1.

### 7.3.2. Différences entre résolution analytique et numérique

On compare deux approches différentes pour construire la contrainte  $\hat{\sigma}$ . La construction analytique de  $\hat{\sigma}$  sous forme polynomiale respecte rigoureusement les équations d'équilibre. En ce sens, c'est une construction statiquement admissible rigoureuse. La construction numérique est une construction statiquement admissible approchée. On détermine un champ de déplacement puis la contrainte est ensuite calculée en utilisant la relation de comportement.

En particulier, dans le cas de la résolution analytique, un élément est sous-découpé au niveau du sommet, ceci pour respecter la symétrie de  $\hat{\sigma}$  (figure 7(a)).





**Figure 7.** *Singularité en pointe d'un élément*

Pour avoir un champ  $\hat{\sigma}$  régulier, il faut que les densités vérifient la condition de compatibilité :

$$\hat{F}_1 \cdot n_2 = \hat{F}_2 \cdot n_1 \quad (25)$$

où  $\hat{F}_\alpha$  et  $n_\alpha$  sont la densité et la normale extérieure sur le coté  $\alpha$ .

Comme cette condition n'est pas imposée *a priori*, une singularité artificielle, qui peut être très sévère si l'on utilise des éléments aplatis, est ainsi introduite. Par la technique de résolution numérique, le couple  $(\hat{F}_1, \hat{F}_2)$  ne joue que par sa somme  $(\hat{F}_1 + \hat{F}_2)$  dans le travail des efforts extérieurs  $W_{ext}$ , pour une formulation en déplacement du problème. En effet, on a  $W_{ext} = (\hat{F}_1 + \hat{F}_2) \cdot U$ . Toute construction de  $\hat{\sigma}$  basée sur une hypothèse cinématique de résolution du problème de minimisation régularise le problème. *Remarque :*

Sans précaution particulière, une analyse éléments finis (comme celle menée lors de la résolution numérique) ne permet pas de garantir les valeurs en tout point  $M \in E$  (et en particulier au sommet, lorsque les densités ne respectent pas (25)) :

$$\hat{\sigma}(M) \neq \sigma_{ex}(M) \quad (26)$$

La comparaison entre les champs  $\hat{\sigma}(M)$  et  $\sigma_{ex}(M)$  est faite au travers de la norme énergétique sur l'ensemble de l'élément  $E$  :

$$\|\hat{\sigma}(M)\|_{\sigma,E} \approx \|\sigma_{ex}(M)\|_{\sigma,E} \quad (27)$$

Il s'agit d'une équivalence au sens du travail sur l'ensemble de l'élément. En effet, dans la procédure d'estimation d'erreur, seules des énergies élémentaires sont utilisées.

## 8. Comparaison des jeux de densités

On a mis en évidence que le choix de la méthode de construction de la contrainte à partir d'un jeu de densité donné joue un rôle clé. La méthode numérique de résolution est validée au paragraphe précédent. Il s'agit ici de comparer les deux jeux de densités construits  $\widehat{F}^{Std}$  et  $\widehat{F}^{Opt}$ . Pour effectuer la comparaison, on résout le problème de construction avec une méthode fixée, successivement avec  $\widehat{F}^{Std}$ , puis  $\widehat{F}^{Opt}$ .

### 8.1. Amélioration de l'indice d'efficacité global

On donne (figure 8(a)) les indices d'efficacité globaux en construisant  $\widehat{\sigma}$  de manière quasi exacte à partir des deux jeux de densités. On constate que l'amélioration de l'indice d'efficacité global est comprise entre 17% et 26% pour l'ensemble des aplatissements  $H/L$  retenus (figure 8(a)).

L/H	$\widehat{F}^{Std}$	$\widehat{F}^{Opt}$	L/H	$\widehat{F}^{Std}$	$\widehat{F}^{Opt}$
2	3.51	2.89	2	3.35	2.75
16	11.18	8.34	16	9.99	7.85
128	2.33	1.92	128	2.16	1.77
(a) Résolution quasi exacte, théorique			(b) Résolution numérique		

**Figure 8.** *Indice d'efficacité globaux*

Des résultats comparables sont obtenus si l'on utilise la construction numérique pour les deux jeux de densité (figure 8(b)).

L'utilisation de densités optimisées  $\widehat{F}^{Opt}$  améliore sensiblement l'estimation d'erreur globale, puisque l'indice d'efficacité se rapproche de 1. Ces densités étant déterminées de manière à minimiser l'erreur en relation de comportement, on obtient systématiquement une erreur inférieure ou égale à celle obtenue en utilisant le jeu de densités standard  $\widehat{F}^{Std}$  associé à une résolution numérique.

$$\|\widehat{\sigma}(\widehat{F}^{Opt}) - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega} \leq \|\widehat{\sigma}(\widehat{F}^{Std}) - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega} \quad (28)$$

## 8.2. Amélioration de l'indice d'efficacité local

### 8.2.1. Amélioration de la répartition de l'erreur

L'intérêt principal des densités  $\hat{F}^{Opt}$  est d'améliorer la qualité locale de l'estimateur d'erreur en relation de comportement. On trace sur ce même exemple les indices d'efficacité locaux pour chacun des éléments de la structure rectangulaire, dans le cas d'un aplatissement de 2 (figure 9), en blanc pour  $\hat{F}^{Std}$ , en gris pour  $\hat{F}^{Opt}$ . Par symétrie nous n'étudions que les huit éléments correspondant au quart de structure rectangulaire (figure 1(b)).

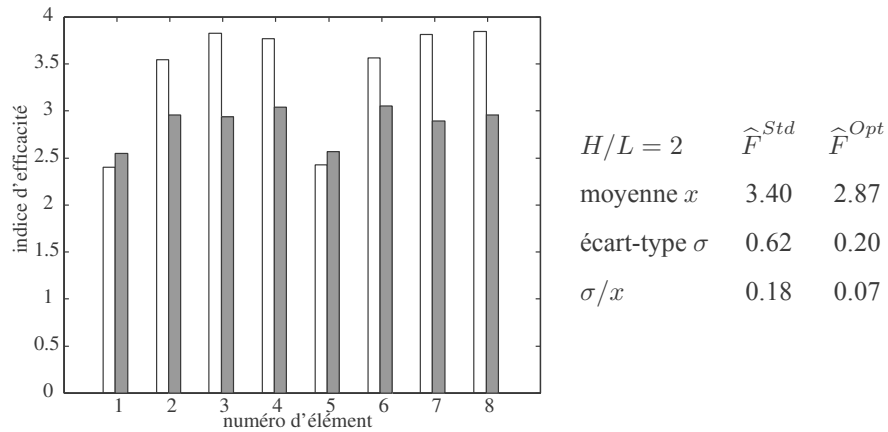


Figure 9. Indices d'efficacité locaux comparés ( $H/L=2$ )

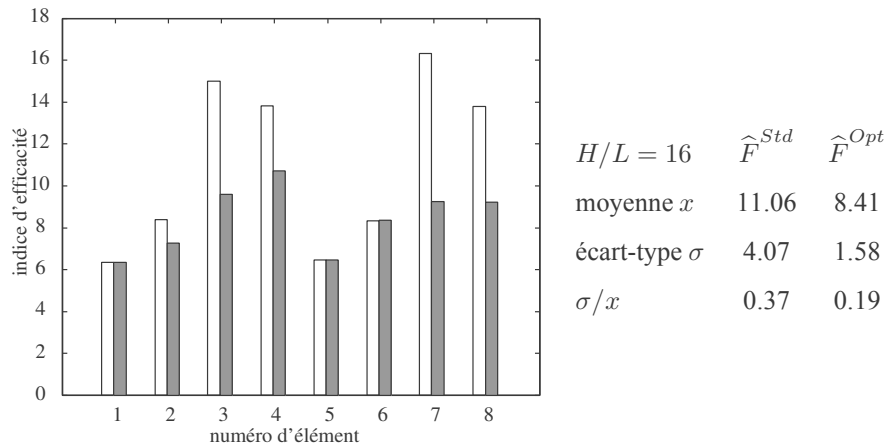


Figure 10. Indices d'efficacité locaux comparés ( $H/L=16$ )

On observe que les estimations locales sont meilleures pour le jeu de densités  $\hat{F}^{Opt}$ . En effet, les indices d'efficacité locaux sont en moyenne plus proche de 1. Ils sont aussi mieux distribués puisque l'écart type est plus faible. Ces deux constatations témoignent d'une qualité locale liée à  $\hat{F}^{Opt}$ .

Cette meilleure distribution des indices d'efficacité locaux est également remarquée lorsqu'on fait varier le niveau d'aplatissement (figure 10).

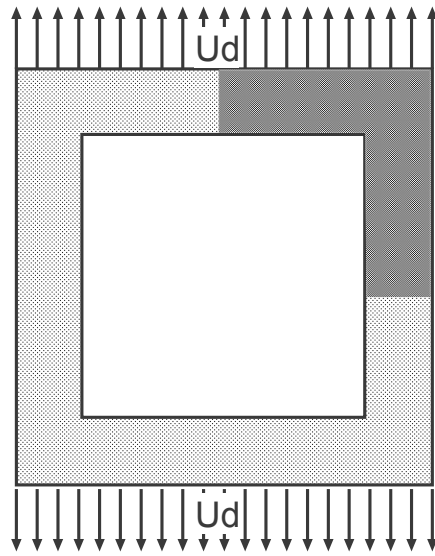


Figure 11. Structure trouée, chargement

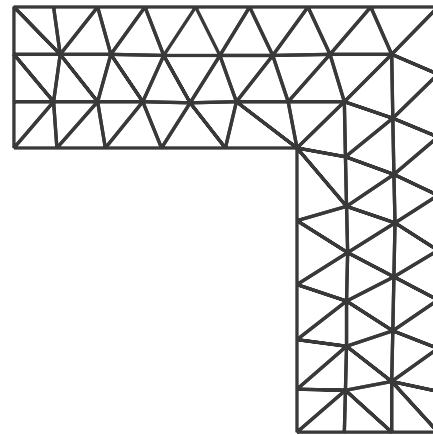


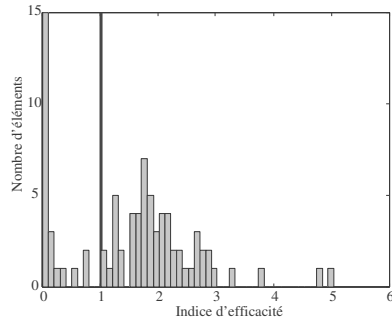
Figure 12. Maillage du quart de la structure

### 8.2.2. Estimation de l'erreur réellement commise

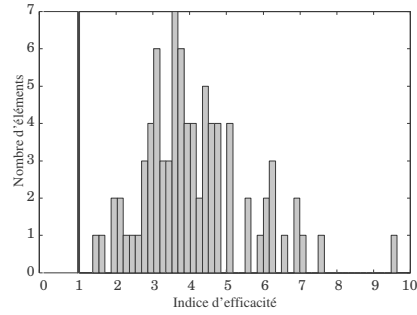
Sur un autre cas test, une structure trouée, on met en évidence la propriété locale qui est conférée à l'estimateur utilisant  $\hat{F}^{Opt}$  plutôt que  $\hat{F}^{Std}$ . La structure étudiée est soumise à des déplacements (figure 11). Le quart de la structure seulement est maillé, étant données les symétries du problème (figure 12).

On compare l'erreur obtenue en construisant  $\hat{\sigma}_h$  de manière numérique à partir de  $\hat{F}^{Std}$  et  $\hat{F}^{Opt}$ . Au niveau global, l'indice d'efficacité est de 3.85 pour le jeu  $\hat{F}^{Std}$  et de 2.21 pour  $\hat{F}^{Opt}$ , ce qui représente un gain de 42 %.

Au niveau local, les indices d'efficacité sont nettement meilleurs sur cet exemple, lorsqu'on utilise les densités optimisées. On trace les histogrammes des indices d'efficacité pour chacun des deux jeux  $\hat{F}^{Std}$  (figure 13) et  $\hat{F}^{Opt}$  (figure 14).



**Figure 13.** *Densités standard*



**Figure 14.** *Densités optimisées*

On remarque sur (figure 14) que tous les indices d'efficacité locaux sont supérieurs à 1, ce qui indique que l'estimation d'erreur conduit en pratique à une majoration de l'erreur réellement commise.

Ceci n'est pas le cas sur (figure 13), puisque par exemple 15 éléments ont un indice d'efficacité quasi nul. Sur cet exemple, une propriété locale conférée à l'estimation par l'optimisation des densités. En effet, l'estimation standard est mise en défaut, alors qu'au niveau global elle donne un niveau d'erreur satisfaisant.

### 8.2.3. Comparaison avec un autre estimateur

Les différents exemples illustrent les bonnes propriétés locales d'un estimateur basé sur le concept d'erreur en relation de comportement, ceci à condition d'utiliser des densités optimisées. Les contributions peuvent être utilisées pour estimer la qualité locale d'une contrainte en norme énergétique.

Dans [LAD 97], cette propriété est illustrée par des exemples 2D. La comparaison est d'ailleurs faite, dans ce même article, avec un estimateur de type SPR. Cet estimateur basé sur le lissage [ZIE 92], bien que très performant au niveau global, ne permet pas d'obtenir une estimation fiable au niveau local.

A titre d'illustration, nous effectuons sur un cas test simple la comparaison entre l'estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement et l'estimateur de type SPR. Il s'agit d'une fissure sollicitée en mode 1 (figure 15) Etant données les symétries, l'étude est menée sur une moitié seulement (figure 16) .

L'erreur en solution, obtenue avec un maillage de référence, est sur cet exemple de 1.8914 %. L'estimateur d'erreur SPR a un indice d'efficacité global excellent :  $\zeta_{SPR} = 0.987$  alors que l'estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement est moins performant :  $\zeta_{e_{RdC}} = 2.433$ .

On trace l'histogramme des indices d'efficacité locaux en utilisant les contributions élémentaires pour chacun des deux estimateurs (figures 18 et 17).

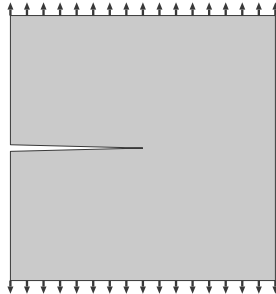


Figure 15. Fissure : chargement

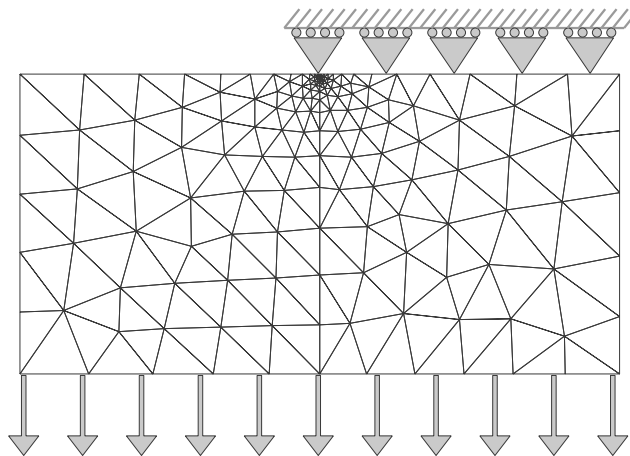


Figure 16. Fissure : maillage

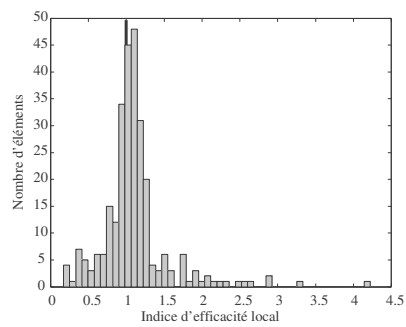


Figure 17. Fissure : estimateur SPR

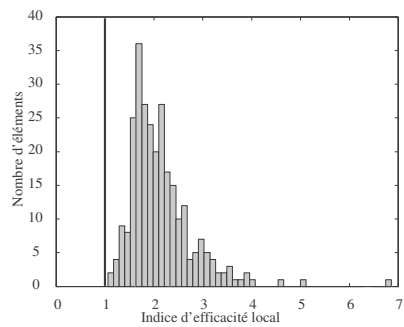


Figure 18. Fissure : estimateur  $e_{RdC}$

On constate qu'un nombre important d'éléments ont une erreur locale largement sous-estimée par l'indicateur SPR, ce qui n'est pas le cas pour l'estimateur d'erreur en relation de comportement.

## 9. Conclusions

L'étude présentée dans cet article, permet de comparer les propriétés de deux versions de l'estimateur en relation de comportement : la version standard et la version optimisée. Cette dernière s'appuie sur :

- une optimisation de la partie linéaire des densités d'efforts sur les interfaces,
- une construction locale du champ de contrainte  $\hat{\sigma}$  par une méthode numérique duale, en déplacement, basée sur des éléments  $p + 3$ .

L'utilisation d'une méthode numérique conduit à construire un champ de contrainte  $\hat{\sigma}$  qui n'est plus rigoureusement en équilibre, cependant les résultats présentés montrent que l'erreur obtenue est peu différente de celle que l'on obtient par une résolution quasi exacte de construction de  $\hat{\sigma}$  au niveau élémentaire. De plus, cette méthode numérique permet d'améliorer de façon significative le comportement de l'erreur globale, par rapport à la construction analytique, lorsque les éléments s'aplatissent.

Les tests numériques présentés montrent également que l'introduction de l'optimisation des densités en équilibre est nécessaire pour que l'estimateur correspondant présente une qualité locale satisfaisante.

Cette étude, financée par le ministère de la recherche français, a été réalisée dans le cadre du contrat "FIABILITÉ" du réseau RNTL en collaboration avec EADS, SAMTECH-France et le CEA.

## 10. Bibliographie

- [BAB 94] BABUŠKA I., STROUBOULIS T., UPADHYAY C., GANGARAJ S., COPPS K., « Validation of a posteriori error estimators by numerical approach », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, vol. 37, 1994, p. 1073–1123.
- [COF 87] COFFIGNAL G., Optimisation et fiabilité des calculs éléments finis en élastoplasticité, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, 1987.
- [COO 99] COOREVITS P., DUMEAU J., PELLE J., « Control of analyses with isoparametric elements in both 2D and 3D. », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, vol. 46, 1999, p. 157–176.
- [DIE 03] DIEZ P., PARÉS, HUERTA A., « Estimateurs d'erreur en route vers les étoiles », *Actes du sixième colloque national en calcul de structures*, 2003.
- [FLO 02a] FLORENTIN E., Sur l'estimation de la qualité locale des contraintes éléments finis en élasticité tridimensionnelle., Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2002.
- [FLO 02b] FLORENTIN E., GALLIMARD L., PELLE J., « Evaluation of the Local Quality of Stresses in 3D Finite Element Analysis. », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 191, 2002, p. 4441–4457.

- [GUE 82] GUEZEL O., Sur l'encadrement du taux de restitution d'énergie, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 1982.
- [LAD 75] LADEVÈZE P., Comparaison de modèles de milieux continus, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, 1975.
- [LAD 91] LADEVÈZE P., PELLE J., ROUGEOT P., « Error estimation and mesh optimization for classical finite elements », *Engrg. Computation*, vol. 8, 1991, p. 69–80.
- [LAD 97] LADEVÈZE P., ROUGEOT P., « New advances on a posteriori error on constitutive relation in f.e. analysis », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 150, 1997, p. 239–249.
- [LAD 99] LADEVÈZE P., ROUGEOT P., BLANCHARD P., MOREAU J., « Local error estimators for finite element analysis », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 176, 1999, p. 231–246.
- [LAD 01] LADEVÈZE P., PELLE J., *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermes, 2001.
- [MAR 91] MARIN P., Sur le contrôle des calculs de structures 2D et 3D élastiques incompressibles et quasi-incompressibles, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 1991.
- [OHM 01] OHMNIMUS S. S. E., E. W., « Local error estimates of FEM for displacements and stresses in linear elasticity by solving local Neumann problems », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, vol. 52, 2001, p. 727–746.
- [PER 98] PERAIRE J., PATERA A., « Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations : local indicators and adaptive refinement », LADEVÈZE P., ODEN J., Eds., *Advances in Adaptive Computational Methods*, p. 199–216, Elsevier, 1998.
- [PRA 47] PRAGER W., SYNGE J., « Approximation in elasticity based on the concept of functions space », *Quart. Appl. Math.*, vol. 5, 1947, p. 261–269.
- [PRU 99] PRUDHOMME S., ODEN J., « On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors. », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 176, 1999, p. 313–331.
- [RAN 97] RANNACHER R., SUTTMEIER F., « A Feedback approach to error control in finite element methods : Application to linear elasticity », *Comp. Mech.*, vol. 19, 1997, p. 434–446.
- [ROU 89] ROUGEOT P., Sur le contrôle de qualité des maillages éléments finis, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [STR 00] STROUBOULIS T., BABUŠKA I., DATTA D., COPPS K., GANGARAJ S., « A posteriori estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest. Part 1 : A posteriori estimation of the error in the Von Mises stress and the stress intensity factor », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 180, 2000, p. 261–274.
- [ZIE 92] ZIENKIEWICZ O., ZHU J., « The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, Part 1 : The recovery technique », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, vol. 33, 1992, p. 1331–1364.