



HAL
open science

Éléments de Plaque pour Structures Sandwich avec Âme Viscoélastique basés sur la Sublamine Generalized Unified Formulation

Girolamo Di Cara, Thi Huyen Cham Le, Michele d'Ottavio, Olivier Polit,
Aurélio Lima Araújo

► To cite this version:

Girolamo Di Cara, Thi Huyen Cham Le, Michele d'Ottavio, Olivier Polit, Aurélio Lima Araújo. Éléments de Plaque pour Structures Sandwich avec Âme Viscoélastique basés sur la Sublamine Generalized Unified Formulation. JNC22 - 22es Journées Nationales sur les Composites (Conférence Virtuelle), Jun 2021, Paris (en ligne), France. hal-04322664

HAL Id: hal-04322664

<https://hal.parisnanterre.fr/hal-04322664>

Submitted on 5 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Éléments de Plaque pour Structures Sandwich avec Âme
Viscoélastique basés sur la Sublamine Generalized
Unified Formulation

*Finite Plate Elements for Viscoelastic Sandwich
Structures based on Sublamine Generalized Unified
Formulation*

G. Di Cara¹, T.H.C Le^{1,2}, M. D'Ottavio¹, O.Polit¹ et A.L. Araujo²

1 : LEME, Université Paris Nanterre
50 rue de Sèvres, 92410 Ville d'Avray, France
e-mail : dicara.girolamo@parisnanterre.fr

2 : IDMEC, Universidade de Lisboa
Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal
e-mail : aurelio.araujo@tecnico.ulisboa.pt

1. Introduction

Les matériaux viscoélastiques présentent un grand intérêt pour les applications dans l'industrie automobile et aérospatiale en raison de leur haut niveau de dissipation d'énergie, ce qui conduit à une réduction directe des vibrations structurelles et du bruit. Pour cette raison, il existe un intérêt pour la fabrication de structures composites comprenant des matériaux viscoélastiques. Il est donc nécessaire de disposer d'un outil numérique capable de prédire, avec précision, la réponse mécanique de la structure, tout en gardant l'effort de calcul au minimum.

Dans cet article, une implémentation MEF de *Sublamine Generalized Unified Formulation* [1] est proposée pour l'approche aux déplacements ainsi que pour l'approche mixte (basée sur le Reissner Mixed Variational Theorem). L'approche à cinématique variable permet d'adapter la complexité du modèle au niveau de précision et au coût de calcul souhaité. L'extension Sublamine de GUF, également appelée approche mixte ESL/LW (couche équivalente/couches discrètes), permet de réduire la taille du problème en regroupant plusieurs plis en une seule couche numérique et en choisissant une cinématique différente pour chacune d'entre elles. De cette manière, l'on donne la possibilité d'exploiter une cinématique plus riche uniquement lorsqu'un état de contrainte tridimensionnel se produit réellement. Cette approche est particulièrement utile pour les panneaux sandwich, pour lesquels différents modèles peuvent être utilisés pour le noyau épais et les peaux minces. Un élément de plaque amélioré à 4 nœuds a été mis en œuvre afin de surmonter le phénomène de verrouillage de cisaillement pour les plaques minces et de réduire le taux de perte de convergence pour le maillage déformé [2].

Plusieurs tests numériques ont été réalisés afin de valider le modèle. Initialement, l'âme viscoélastique de la structure sandwich est représentée par un module complexe constant. La nature complexe de la matrice de rigidité a également permis d'éclairer la fiabilité de la méthode de résolution Modal Strain Energy (MSE). Cette méthode permet d'estimer le facteur de perte modale en négligeant les formes de mode imaginaires. Par contre, dans la méthode directe, le facteur de perte modale est directement calculé à partir du rapport entre la partie imaginaire et réelle de la valeur

propre. Il a été prouvé que pour des facteurs de perte modérés, les différences entre les méthodes MSE et Direct sont négligeables. Par la suite, l'analyse viscoélastique a été étendue aux matériaux dont le comportement dépend de la fréquence. Le module de cisaillement peut être représenté par des modèles généralisés de Maxwell ou de dérivation fractionnaire. Les résultats obtenus en [3, 4] ont été utilisés pour prouver la robustesse et l'efficacité de l'outil numérique proposé.

2. Principes variationnels

Dans cet article les équations seront dérivées en se référant au principe des déplacements virtuels (PVD) ainsi que la formulation mixte RMVT. Dans le premier, le champ de déplacement est postulé de façon axiomatique le long de la direction z de la plaque. L'approche mixte RMVT permet de postuler le champ de contraintes transverses de la même façon que le champ de déplacement. Il en résulte un champ de contraintes transverses qui remplit la C_z^0 -condition.

2.1. Déplacement Virtuel (PVD)

Les équations d'équilibre en forme variationnelle peuvent être écrites comme suit :

$$\int_V \delta \epsilon_{\alpha\beta}^G \sigma_{\alpha\beta}^H + \delta \epsilon_{i3}^G \sigma_{i3}^H \, dV = \int_{\Omega} \delta u_i t_i \, d\Omega \quad (\text{Eq. 1})$$

dont V dénote le volume de la plaque, les index grecs $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ représentent les directions dans le plan seulement et l'index latin $i \in \{1, 2, 3\}$ inclut la direction transversale z . L'indice supérieure G indique que les déformations sont calculées à partir des relations géométriques déformation-déplacement et l'indice H signifie que les contraintes sont calculées via la loi de Hooke. Scindant les contributions dans le plan (b), et hors plan due à la composante normale (n) et aux composantes de cisaillement (s)

$$\begin{aligned} \epsilon_b &= [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_6]^T; & \epsilon_n &= \epsilon_3; & \epsilon_s &= [\epsilon_4 \ \epsilon_5]^T \\ \sigma_b &= [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_6]^T; & \sigma_n &= \sigma_3; & \sigma_s &= [\sigma_4 \ \sigma_5]^T \end{aligned} \quad (\text{Eq. 2})$$

et en exploitant la loi de comportement, on obtient l'expression suivante du travail interne :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_V \delta \epsilon_b^{GT} \sigma_b^H + \delta \epsilon_n^{GT} \sigma_n^H + \delta \epsilon_s^{GT} \sigma_s^H \, dV = \\ &= \int_V \delta \epsilon_b^{GT} \tilde{C}_{bb} \epsilon_b^G + \delta \epsilon_b^{GT} \tilde{C}_{bn} \epsilon_n^G + \delta \epsilon_n^{GT} \tilde{C}_{nb} \epsilon_b^G + \delta \epsilon_n^{GT} \tilde{C}_{nn} \epsilon_n^G + \delta \epsilon_s^{GT} \tilde{C}_{ss} \epsilon_s^G \, dV \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3})$$

où l'indice supérieure T indique l'opérateur de transposition.

2.2. Reissner Mixed Variational Theorem (RMVT)

Le principe mixte RMVT permet de formuler à priori de manière indépendante le champ cinématique et les contraintes transverses σ_{i3} , qui peuvent ainsi satisfaire aux conditions de continuité interlaminaire. Elles jouent donc le rôle de multiplicateurs de Lagrange afin de vérifier la compatibilité des déformations transverses :

$$\int_V \delta \epsilon_{\alpha\beta}^G \sigma_{\alpha\beta}^C + \delta \epsilon_{i3}^G \sigma_{i3} + \delta \sigma_{i3} (\epsilon_{i3}^G - \epsilon_{i3}^C) \, dV = \int_{\Omega} \delta u_i t_i \, d\Omega \quad (\text{Eq. 4})$$

L'indice C indique que les contraintes planes $\sigma_{\alpha\beta}^C$ et les déformations transverses ϵ_{i3}^C sont obtenues par la loi de Hooke dans sa forme mixte [1]. Cela permet d'obtenir l'expression du travail interne pour la formulation mixte :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_V \delta \epsilon_b^{GT} \sigma_b^C + \delta \epsilon_n^{GT} \sigma_n + \delta \epsilon_s^{GT} \sigma_s + \delta \sigma_n^T (\epsilon_n^G - \epsilon_n^C) + \delta \sigma_s^T (\epsilon_s^G - \epsilon_s^C) \, dV = \\ &= \int_V \delta \epsilon_b^{GT} C_{bb} \epsilon_b^G + \delta \epsilon_b^{GT} C_{bn} \sigma_n + \delta \epsilon_n^{GT} \sigma_n + \delta \epsilon_s^{GT} \sigma_s + \\ &\quad \delta \sigma_n^T \epsilon_n^G - \delta \sigma_n^T C_{nb} \epsilon_b^G - \delta \sigma_n^T C_{nn} \sigma_n + \delta \sigma_s^T \epsilon_s^G - \delta \sigma_s^T C_{ss} \sigma_s \, dV \end{aligned} \quad (\text{Eq. 5})$$

3. Approche à cinématique variable & approximation EF

La distribution des variables de la formulation en direction de l'épaisseur est postulée de façon axiomatique comme suit :

$$\mathcal{U}^k(x_\alpha, z_k) = \sum_{\alpha_{\mathcal{U}}=0}^{N_{\mathcal{U}}^k} F_{\alpha_{\mathcal{U}}}(z_k) \mathcal{U}_{\alpha_{\mathcal{U}}}^k(x_\alpha) \quad (\text{Eq. 6})$$

où $\mathcal{U} \in \{u_i, s_i\}$, k indique la couche numérique et $\alpha_{\mathcal{U}}$ varie entre 0 (distribution de la variable constante) et $N_{\mathcal{U}}^k$ ordre d'expansion de la variable \mathcal{U} dans la couche numérique k . Plus de détails au sujet des fonctions d'interpolation $F_{\alpha_{\mathcal{U}}}$ en direction de l'épaisseur et sur les modalités d'assemblage des couches numériques sont fournis en [1] et ne seront pas détaillés.

Un élément linéaire à 4 nœuds a été utilisé pour interpoler les variables dans le plan à l'aide de fonctions de forme isoparamétriques. Afin de corriger la pathologie du verrouillage en cisaillement transverse, une interpolation spécifique QC4 est utilisée pour les contributions constantes en z des déformations $\gamma_{\alpha z}$. Il a été montré que cette approximation EF permet ainsi de réduire la sensibilité à la distorsion du maillage [2].

3.1. Problème complexe aux valeurs propres

Une fois les matrices EF calculées, le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0 \quad (\text{Eq. 7})$$

L'âme de la structure est caractérisée par un module de Young complexe et constant :

$$E_c = E_0 (1 + i\eta_c) \quad (\text{Eq. 8})$$

La nature viscoélastique de l'âme mène à une matrice de raideur complexe. Le système Eq. 7 peut donc être résolu en utilisant un solveur complexe (*Direct Method*) ou en n'utilisant que la partie réelle de la matrice de raideur (*MSE*). Les différences entre les deux méthodes seront analysées dans la section suivante.

4. Résultats

Une analyse linéaire de vibration libre a été exploitée pour valider le code MEF basé sur l'approche à cinématique variable SGUF. La structure sandwich se compose de trois plis, deux peaux élastiques et une âme viscoélastique. Les propriétés élastiques des peaux sont les suivantes : $E_f = 69$ GPa ; $\nu_f = 0.3$, $\rho_f = 2766$ kg/m³ ; celles de l'âme viscoélastique : $E_0 = 1.794$ MPa ; $\nu_c = 0.3$, $\rho_c = 968.1$ kg/m³. La longueur de la plaque est $L = 177.8$ mm et sa largeur $l = 12.7$ mm. L'épaisseur des peaux est

égal à $H = 1.524$ mm et pour l'âme $h = 0.127$ mm. Trois couches numériques ont été exploitées pour représenter le sandwich, où le modèle FSDT est utilisé pour les 2 peaux ainsi que pour le cœur. On considère 2 configurations : le cas simplement appuyé aux extrémités droite et gauche et le cas encastré à l'extrémité gauche. Enfin, un maillage avec 56x4 éléments a été utilisé.

Tab. 1.: Valeur propres et facteurs de pertes pour deux facteurs de perte et conditions aux limites SFSF et CFFF

η_c	SFSF						CFFF					
	MSE		Direct		Reference [3]		MSE		Direct		Reference [3]	
	ω [Hz]	η/η_c										
0.1	148.50	0.3505	148.58	0.3500	148.51	0.3502	64.3	0.282	64.3	0.281	64.1	0.281
	489.32	0.1953	489.38	0.1952	488.47	0.1958	297.8	0.242	297.9	0.241	296.7	0.242
	1039.24	0.1063	1039.28	0.1063	1034.69	0.1071	748.5	0.153	748.6	0.153	744.5	0.154
	1809.49	0.0644	1809.51	0.0644	1795.13	0.0653	1406.6	0.088	1406.7	0.088	1395.7	0.089
1.0	148.50	0.3505	156.22	0.3050	154.42	0.3052	64.3	0.282	68.0	0.202	67.5	0.202
	489.32	0.1953	495.17	0.1913	492.06	0.1918	297.8	0.242	306.0	0.217	303.1	0.218
	1039.24	0.1063	1042.66	0.1058	1036.63	0.1065	748.5	0.153	755.6	0.149	749.4	0.150
	1809.49	0.0644	1811.61	0.0643	1796.30	0.0651	1406.6	0.088	1410.6	0.087	1398.3	0.088

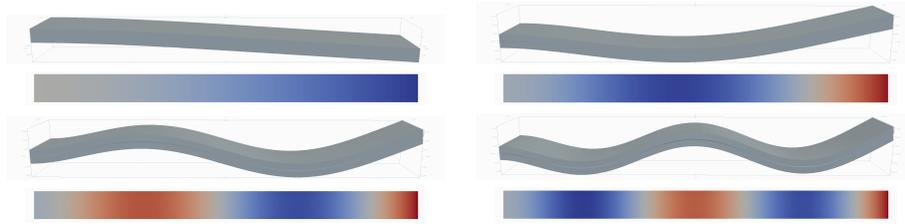


Fig. 1.: Premiers 4 modes de flexion de la structure sandwich avec un facteur de perte η_c égal à 0.1 et conditions aux limites CF. La distribution du déplacement u_z le long de la direction longitudinale est ainsi représentée.

Tab. 1 montre comme pour un cœur avec $\eta_c = 0.1$ les différences entre la méthode MSE et la méthode Direct sont négligeables. Dès que le facteur de perte augmente, les différences deviennent significatives et les deux méthodes ne peuvent plus être utilisées indifféremment. Les considérations formulées ci-dessus ne dépendent pas des conditions aux limites appliquées à la structure comme l'on peut voir en comparant les résultats pour les deux configurations étudiées.

Références

- [1] M. D'Ottavio « A Sublaminare Generalized Unified Formulation for the analysis of composite structures », Vol. 142, pp. 187–199, 2016, ISSN 0263-8223.
- [2] T. H. C. Le, M. D'Ottavio, P. Vidal, O. Polit « A new robust quadrilateral four-node variable kinematics plate element for composite structures », Vol. 133, pp. 10–24, 2017, ISSN 0168-874X.
- [3] M. Bilasse, L. Azrar, E. M. Daya « Complex modes based numerical analysis of viscoelastic sandwich plates vibrations », Vol. 89, pp. 539–555, 2011, ISSN 0045-7949.
- [4] A. L. Araújo, V. S. Carvalho, C. M. M. Soares, J. Belinha, A. J. M. Ferreira « Vibration analysis of laminated soft core sandwich plates with piezoelectric sensors and actuators », Vol. 151, pp. 91–98, 2016, ISSN 0263-8223.